Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Polynome im Affenkasten

Polynome nicht zu hohen Grades haben die überraschende Eigenschaft, dass sie sich in Kästen oder äquidistanten Gittern einpassen. Im Zusammenhang damit gelten auch viele schöne Flächenverhältnisse. Es eröffnet sich die Möglichkeit, entdeckendes Lernen anzuregen und dabei durchaus sinnvolle Experimente mit Computeralgebrasystemen zu unterstützen. Der Scherungsgedanke führt zu eleganten Beweisen und Verallgemeinerungen, einige Grundgedanken lassen sich auch bei anderen Funktionenklassen anwenden. Ziel des Beitrags ist es zu zeigen, dass auch in mathematischem Standardstoff außerordentliche Schönheit verborgen ist, geeignet, die Freude an der Mathematik wach zu halten.

Vorbemerkungen

Wenn Lernende in der Mathematik eigenständig tätig werden sollen, ist es unerlässlich, dass sie ihre Vermutungen, Überlegungen und Entdeckungen in Worte fassen können, mit Worten kann der kreative Prozess erst eigentlich in Gang kommen. Daher habe ich die "Affenkästen", "Bärenkästen" und "Pantherkäfige" für die Polynome eingeführt. Ein wenig stand auch der mittelalterliche Gaukler Pate, der sein exotisches Tier im Käfig präsentierte. Das Bild des Käfigs passt zu dem im Folgenden vorgestellten gleichmäßigen Raster, dem sich die Polynome niederen Grades nicht entziehen können. Die starke "innere Formbindung" kennt auch der Ingenieur, der lieber zu Splines statt zum Interpolationspolynom greift.

Affenkästen der Polynome 3. Grades

Wendepunkt und Extrempunkt (falls vorhanden) definieren eine Kastenzelle. Alle Polynome 3. Grades mit Extrema haben (bis auf Achsenstreckungen) den hier mit ausgewählten Tangenten gezeigten Graphen. Offenes Arbeiten wird schon dadurch angeregt, dass kein Funktionsterm und kein Koordinatensystem vorgegeben wird[1]. Auch die Generalisierung muss nicht vorweg angeregt sein, sondern ergibt sich als sinnvolles mathematisches Tun[2].

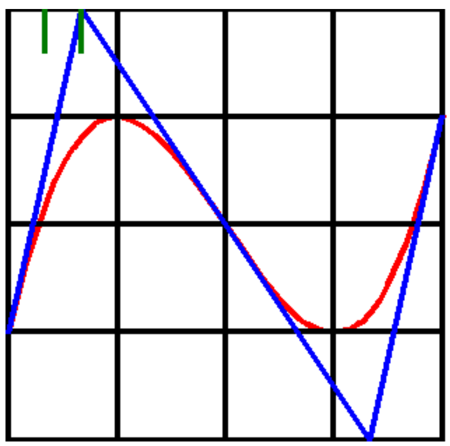

Abb. 1

[1] Selbstverständlich sollen die gezeigten Rasterpunkte exakt erreicht werden und nicht nur ungefähr. Stets vermittelt das Raster exakte Information.

[2] Insofern sollen fundamentale mathematische Arbeitsweisen angestrebt werden.

Scherung

Die Addition eines linearen Terms zu einem beliebigen Funktionsterm bewirkt eine Scherung des Graphen. Scherachse ist die Parallele zur y-Achse durch die Nullstelle der addierten Geraden. Inzidenzen, Teilverhältnisse und Flächen bleiben erhalten, aber auch Wendestellen und der Grad der Polynome.

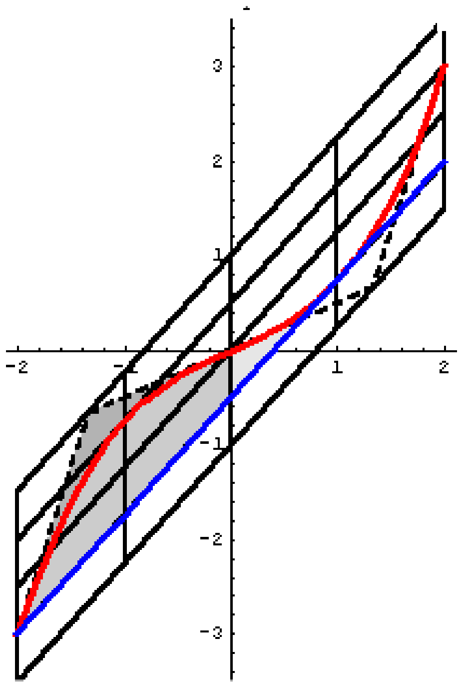

Abb. 2

Daher gelten alle am geraden Affenkasten gefundenen Eigenschaften auch an schrägen Affenkästen. Die Rolle des Extremums nimmt der Berührpunkt einer beliebigen Tangente ein. Damit gibt es nun zu jedem Polynom 3. Grades unendlich viele solcher Affenkästen.

Es zeigt sich, dass die Scherung eine zu unrecht vernachlässigte Abbildung ist. In den hier betrachteten Zusammenhängen wird sie auch bei anderen Polynomen mit großer Wirkung eingesetzt.

Es ist sehr ergiebig Flächen und Flächenverhältnisse zu betrachten. Das kann hier nicht dargestellt werden [Ha].

Bärenkästen der Parabeln

Zu jeder Sehne einer Parabel existiert an ihrer Mittenstelle[3] die zu ihr parallele Tangente. Diese Tatsache wird auch von Physikern gern verwendet und ergibt sich hier, wenn man sich die Sehne in waagerechte Lage geschert denkt. Die vier Zeilen des Kastens folgen aus $(2r)^2 = 4r^2$. Besonderheit ist, dass die Randtangente stets wie gezeigt den Rasterpunkt trifft. Das hat zur Folge, dass sich die Tangenten an der Mittenstelle auf dem Doppelkastenrand treffen. Das lässt sich sowohl durch Ableiten, als auch durch Scherung zeigen. Auch hier sind Flächenberechnungen und ihr Vergleich mit der Kastenfläche sinnvoll.

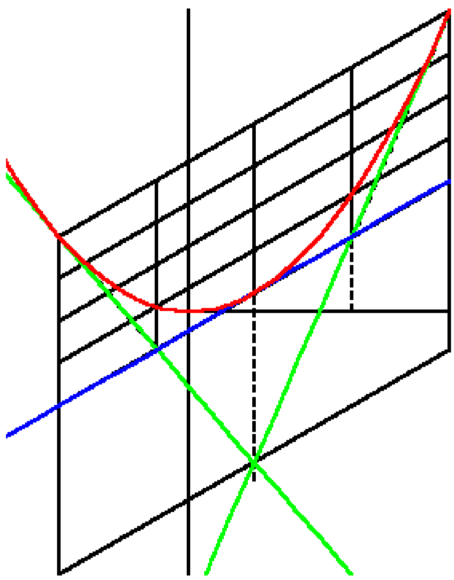
Abb. 3

[3] Das Wort “Stelle” wird konsequent für Abszissen (x-Werte) verwendet.

Archimedes hat die Fläche zwischen Parabel und Sehne durch Ausschöpfung mit Dreiecken bestimmt [Ha]. Heute ist die Integralrechnung das angemessene Werkzeug, um zu beweisen, dass die Parabel zwei Drittel des Kastens einnimmt (Abb. 4).

Aus ihm folgt durch Betrachtung passender Trapeze sofort die “Keplersche Regel”[4]

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

und damit ein direkter Bezug zu Anwendungen.

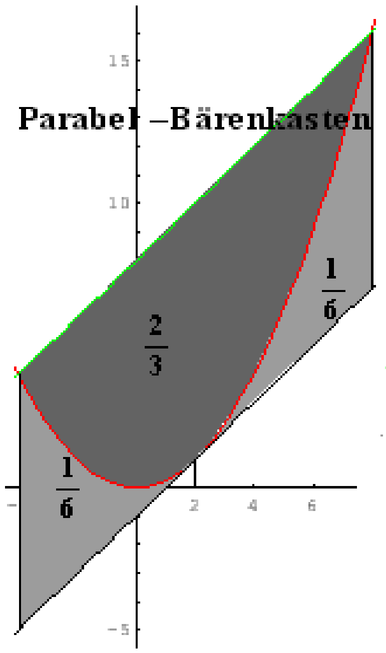

Abb. 4

Pantherkäfig der Polynome 4. Grades

Polynome 4. Grades haben entweder genau zwei Wendepunkte oder gar keinen. Die beiden Wendestellen, so vorhanden, definieren ein Gitter, auf dessen äußeren Stangen die Wendetangenten den Graphen schneiden. Die Flächen links und rechts zwischen Wendetangenten und Graphen sind gleich groß. Die Verbindung des Wendepunktes mit dem Schnittpunkt halbiert die betrachtete Fläche [Ha].

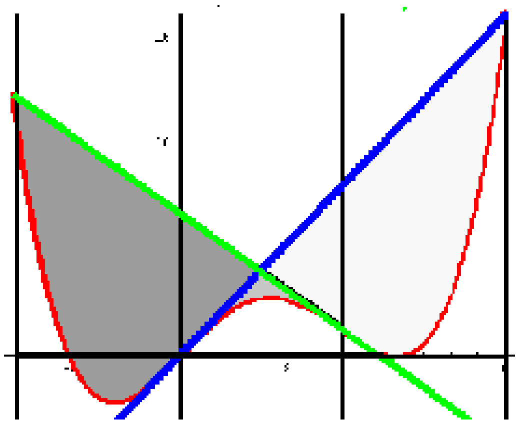
Abb. 5

Wenn bei der Funktion f mit $f(x) = a\,(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}r\,x^3 + m\,x)$

der Wendestellenabstand r ganzzahlig gewählt wird, lassen sich die Schnittprobleme leicht lösen, obwohl sie vom Grad 4 sind. Dazu muss man ausnutzen, dass die Wendestelle dreifache Nullstelle der Schnittproblem-Gleichung ist. Natürlich lassen sich auch biquadratische Funktionsterme gut handhaben. Eine Quergliederung bringt hier keine “guten” Ergebnisse mehr. Die Formenvielfalt nimmt mit dem Grad der Polynome stark zu.

[4] Die Bezeichnung “Fass-Regel” sollte man vermeiden, da Lernende leicht meinen, man bestimme mit ihr ein Volumen.

[5] Der Name “Pantherkäfig” ist dem Gedicht von R. M. Rilke: “Der Panther” entlehnt.

Potenzfunktionen

Verbindet man einen beliebigen Punkt einer beliebigen Potenzfunktion mit k>1 mit dem Ursprung und längs der Tangente mit der x-Achse, so teilt der Funktionsgraph das entstehende Dreieck im Verhältnis $\boldsymbol{k:1}$.

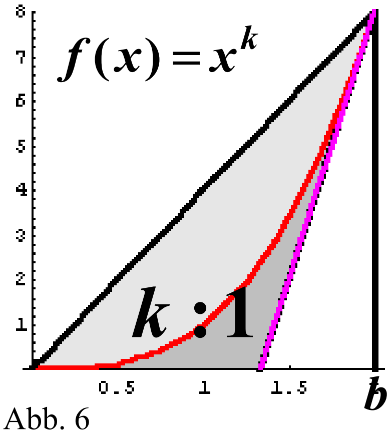

Abb. 6

Beim ersten Erkunden sollte man mit b=1 die Rechnungen vereinfachen.

Varianten dieses schönen Zusammenhangs kann man durch Addition eines linearen Terms (Scherung, s.o.) oder durch Betrachtung von Wurzelfunktionen erhalten.

Eine besondere Exponentialfunktionenschar

Die durch $f_k(x) = \left(e^x - k\right)^2$

definierte Schar ist einschlägig bekannt. Dennoch wird i.d.R. nicht das Augenmerk auf Zusammenhänge gerichtet.

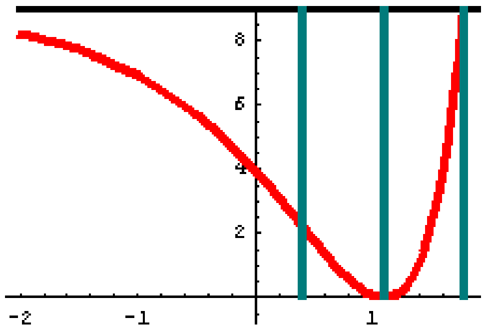

Abb. 7

Beachtet man, dass da eine verschobene eSFunktion quadriert wird, so sind die Berührnullstelle ln(k) und die Asymptote in der Höhe k^2 klar. Erstaunlich ist, dass die Wendestelle und die Schnittstelle mit der Asymptote von der Nullstelle stets den festen Abstand ln(2) haben (Abb. 7).

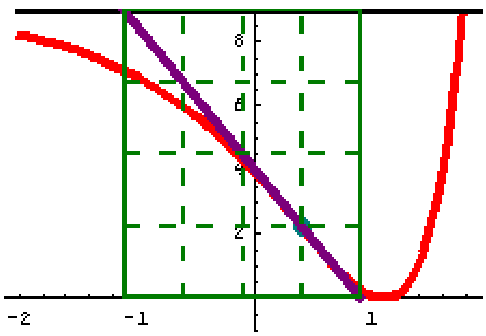

Abb. 8

Die Wendetangente bildet durch ihren Schnitt mit der x-Achse und der Asymptote einen Kasten. Dieser hat die feste Breite 2 und der Wendepunkt liegt immer auf der gezeigten Viertelstelle (Abb. 8). Die Fläche des Kastens ist $2k^2$ und damit genau gleich der links nicht begrenzten Fläche zwischen Asymptote und Graph.

Mathematische Besonderheiten und Schönheiten lassen sich vielfältig entdecken.

Literatur und weitere Informationen

[Ha] Haftendorn: “Polynome im Affenkasten”, www.doerte-haftendorn.de