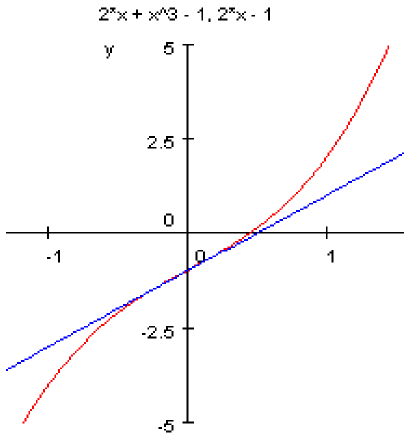
Cardanische Formel

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, Jan 2005 www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt

Die Gleichung 3. Grades $x^3 + px + q = 0$ hat als ungerades Polynom sicher eine reelle Nullstelle. Man berechnet sie aus: (Herleitung andere Seite und im Internet, Bereich Algebra)

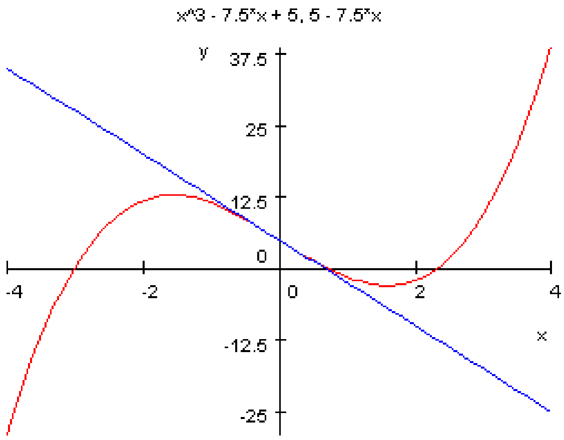
$$xs = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} \; - \; \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}} \quad \text{mit } R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$



Für positive p ist R sicher positiv und xs lässt sich berechnen. Fasst man die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm auf, so ist der Graph eine auf eine steigende Gerade aufgesetzte Sattelfunktion, gescherte Sattelfunktion.
Man sieht so auch sofort, dass die Lösung und q dasselbe Vorzeichen haben.

Weitere Nullstellen können nur für negatives p entstehen. Solange nun immer noch R positiv ist, ist die Berechnung unproblematisch.

Für R=0 ist $xs = -2 * \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ Lösung, weitere Lösung ist $xs = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ doppelt.



Wenn nun aber R negativ ist, ergibt sich unter den beiden dritten Wurzeln eine komplexe Zahl. Diesen Fall nennt man “casus irreduzibilis”. Die Graphen für einen solchen Fall zeigen, dass man mitnichten daraus schließen kann, dass es keine reellen Lösungen gibt, sondern ganz im Gegenteil sind dies die Fälle mit drei Lösungen. Die komplexe Lösung, die man aus der Formel erhält, liegt in der Gaußschen Zahlenebene auf einer Geraden mit dem Steigungswinkel 120/. Zu ihr gehöht daher eine reelle Lösung gleichen Betrags. Wird sie mit s bezeichnet, dann ist nach dem Hornerschema $x^2 + s\;x + s^2 + p$ der Term des Restpolynoms und damit sind

$$\left\{ -\frac{s}{2} - \frac{\sqrt{-4 \cdot p - 3 \cdot s^2}}{2}, \frac{\sqrt{-4 \cdot p - 3 \cdot s^2}}{2} - \frac{s}{2} \right\}$$

die weiteren beiden Lösungen (p ist negativ, s.o.).

Die Schwierigkeit liegt in der Beschaffung von s. Dazu dient die interaktive GeoGebra-Untersuchung (siehe weitere Seite und Internet ->Algebra).